

به نام خدا
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد اصفهان (خوراسگان)

درس: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

رشته: حسابداری

تحقیق در عملیات

جلسه سوم

فصل دوم

روش سیمپلکس

3

مفاهیم اولیه

در این قسمت تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس را ارائه می دهیم.

4

تحقیق در عملیات

عملیات سطری-مقدماتی: یک دستگاه معادلات خطی مانند $Ax = b$ با m معادله و n متغیر و با فرض $m < n$ در نظر بگیرید که در آن محدودیت ها مستقل خطی هستند. اگر تغییرات زیر در این دستگاه معادلات انجام شود، جواب های آن تغییری نمی کنند:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

(۱) ضرب طرفین هر یک از معادلات در یک مقدار ثابت و ناصفر

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 5x_1 = 5 \end{cases}$$

(۲) اضافه کردن مضربی از یک معادله به معادله دیگر (طرفین معادله)

این دو عملیات به عملیات سطری-مقدماتی معروف هستند و ویژگی اصلی آنها این است که تغییری در جواب های دستگاه نمی دهند.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

وابسته

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

مستقل

5

تحقیق در عملیات

مثال ۱-۲. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

که تنها جواب آن $(x_1, x_2) = (2, 1)$ است. اگر دو عملیات سطری-مقدماتی زیر روی این دستگاه انجام شود، جواب آن تغییری نمی کند:

(۱) ضرب طرفین معادله اول در ۲

(۲) ضرب طرفین معادله اول در ۳ و جمع معادله حاصل با معادله دوم

با این تغییرات، دستگاه معادلات زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 5x_1 = 5 \end{cases}$$

که بوضوح می توان دید که تنها جواب این دستگاه، همان جواب قبلی یعنی $(x_1, x_2) = (2, 1)$ است.

6

تحقیق در عملیات

روش گاوس- جردن: این روش برای حل دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول به فرم $Ax = b$ کار می رود. در این دستگاه، فرض بر این است که معادلات موجود، مستقل خطی و سازگار بوده که این چنین دستگاهی دارای بینهایت جواب است. روش گاوس- جردن، دستگاه معادلات خطی ذکر شده را به کمک دنباله ای از عملیات سطری- مقدماتی، به دستگاه معادلات جدیدی تبدیل می کند که ضریب m مجهول از n مجهول مسئله، در یکی از محدودیت ها برابر یک و در مابقی آنها برابر صفر شود که با این کار، یک ماتریس همانی $m \times m$ در دستگاه معادلات جدید بوجود می آید. سپس با یک طرف نگه داشتن متغیرهای با ضریب یک، می توان آنها را بر حسب متغیرهای باقیمانده محاسبه نمود.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۲. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس- جردن حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 7 \end{cases}$$

حل: دستگاه معادلات فوق را در جدولی به فرم زیر وارد می کنیم، بدین صورت که هر معادله در یک سطر وارد می شود (ضریب هر متغیر در زیر آن و اعداد سمت راست محدودیت ها در ستون آخر):

سمت راست محدودیت	x_1	x_2	x_3
۵	۱	۲	۱
۷	۲	۱	۸

8

تحقیق در عملیات

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۲	۱	۵
۲	۱	۸	۷

طبق روش گاوس-جردن، باید ضریب متغیر x_1 در یکی از محدودیت ها برابر یک و در مابقی آنها برابر صفر باشد. با توجه به جدول فوق، کفایت ضریب متغیر x_1 در محدودیت دوم برابر صفر شود. این کار توسط عملیات سطری-مقدماتی زیر انجام می شود:

(۱) ضرب سطر اول (معادله اول) در (-۲) و جمع آن با سطر دوم (معادله دوم) در جدول فوق

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۲	۱	۵
۰	-۳	۶	-۳

تحقیق در عملیات

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۲	۱	۵
۰	-۳	۶	-۳

اکنون ضریب متغیر x_2 در سطر دوم عملیات سطری-مقدماتی زیر، برابر یک می شود:

(۲) ضرب سطر دوم در $(\frac{-1}{۳})$ (در جدول فوق)

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۲	۱	۵
۰	۱	-۲	۱

تحقیق در عملیات

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۲	۱	۵
۰	۱	-۲	۱

در نهایت ضریب متغیر x_2 در سطر اول به کمک عملیات سطری-مقدماتی زیر، برابر صفر می شود:

(۳) ضرب سطر دوم در (-۲) و جمع آن با سطر اول (در جدول فوق)

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۰	۵	۳
۰	۱	-۲	۱

11

تحقیق در عملیات

x_1	x_2	x_3	سمت راست محدودیت
۱	۰	۵	۳
۰	۱	-۲	۱

با توجه به ماتریس همانی به دست آمده در جدول و ضرایب مدنظر برای متغیرهای x_1 و x_2 ، دستگاه

معادلات متناظر با جدول فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

با محاسبه x_1 از محدودیت اول و x_2 از محدودیت دوم، این دو متغیر بر حسب متغیر x_3 ، به دست می

آیند:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

12

تحقیق در عملیات

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

اکنون می توان با مقداردهی دلخواه به متغیر x_3 ، مقادیر x_1 و x_2 را بر حسب آن به دست آورد. در این حالت، x_3 متغیر مستقل و x_1 و x_2 را متغیر وابسته می نامند.

به عنوان مثال، اگر قرار دهیم $x_3 = 1$ ، در این صورت داریم $x_1 = -2$ و $x_2 = 3$ و این یک جواب برای دستگاه اصلی است.

13

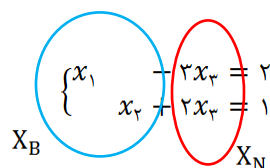
تحقیق در عملیات

متغیرهای پایه و غیرپایه: دستگاه معادلات خطی به فرم $Ax = b$ با m معادله و n مجهول را در نظر بگیرید که معادلات موجود در این دستگاه، مستقل خطی بوده و $\text{rank}(A) = m$. به کمک روش گاوس- جردن، می توان دستگاه معادلات خطی ذکر شده را به یک دستگاه معادلات جدید که شامل یک ماتریس همانی $m \times m$ است، تبدیل نمود.

14

تحقیق در عملیات

مؤلفه های بردار جواب دستگاه فوق یعنی X را به دو قسمت $X = (X_B, X_N)$ تقسیم می کنیم. از بین متغیرهای موجود در بردار X ، متغیرهایی که ضرایب آنها به صورت همانی در می آید را متغیرهای پایه (اساسی) نامیده و با X_B نشان می دهیم. ضرایب متغیرهای پایه با زیرماتریس B از ماتریس A نشان داده شده که به ماتریس پایه معروف است. مابقی متغیرها نیز متغیرهای غیرپایه (غیراساسی) بوده و با X_N نشان داده می شوند که ضرایب متناظر آنها در ماتریس غیرپایه N آورده شده است.



15

تحقیق در عملیات

با تفکیک ستون های متناظر متغیرهای پایه و غیرپایه در ماتریس ضرایب A ، دستگاه معادلات $Ax = b$ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad [B, N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b \quad \rightarrow \quad BX_B + NX_N = b$$

دستگاه فوق پس از اعمال روش گاوس- جردن، به صورت زیر در می آید:

$$IX_B + \bar{N}X_N = \bar{b}$$

که در آن I ماتریس همانی و $\bar{N}$ شامل مؤلفه های جدید ماتریس N پس از اعمال روش گاوس- جردن، است.

در این حالت می توان متغیرهای پایه را بر حسب متغیرهای غیرپایه و از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$X_B = \bar{b} - \bar{N}X_N$$

16

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۳. دستگاه معادلات خطی مثال ۲-۲ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 7 \end{cases}$$

که در آن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix},$

این دستگاه پس از روش گاوس-جوردن، به دستگاه زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

که پارامترهای موجود در این دستگاه نیز به صورت زیر هستند:

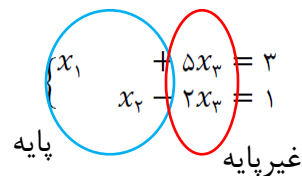
$$x_B = (x_1, x_2), x_N = x_3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \bar{N} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

17

تحقیق در عملیات

در این حالت، x_1 و x_2 متغیرهای پایه (وابسته) و x_3 متغیر غیرپایه (مستقل) خواهد بود.



در نهایت، می توان متغیرهای پایه را بر حسب متغیرهای غیرپایه و از معادلات زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

18

تحقیق در عملیات

جواب پایه (اساسی): اگر دستگاه $Ax = b$ با روش گاوس-جردن به دستگاه $Ix_B + \bar{N}x_N = \bar{b}$ تبدیل شود و قرار دهیم $x_N = 0$ ، در این صورت $x_B = \bar{b}$ خواهد بود. بنابراین، جوابی برای دستگاه به صورت زیر به دست می آید:

$$x = (x_B, x_N) = (\bar{b}, 0)$$

این چنین جوابی را جواب پایه (اساسی) می نامند.

$$Ix_B + \bar{N}x_N = \bar{b}$$

19

تحقیق در عملیات

جواب پایه (اساسی) شدنی: ناحیه شدنی یک مسئله برنامه ریزی خطی به فرم استاندارد را در نظر بگیرید.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$$

اگر برای دستگاه $Ax = b$ در این ناحیه، یک جواب پایه به دست آوریم که در شرط $x \geq 0$ نیز صدق نماید، یک جواب پایه (اساسی) شدنی خواهیم داشت. بدین منظور باید داشته باشیم $\bar{b} \geq 0$.

$$\begin{array}{ll} \max/\min & z = cx \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

$$Ax = b, \quad \text{جواب}$$

$$x \geq 0, \quad \text{شدنی}$$

20

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۴: فرض کنید ناحیه شدنی S توسط دستگاه معادلات زیر تعریف شده باشد.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

در مثال ۲-۳، دو معادله موجود در این ناحیه شدنی، به کمک روش گاوس-جوردن، به دستگاهی تبدیل شد که متغیرهای پایه و غیر پایه آن مشخص شده و مقدار متغیرهای پایه نیز بر حسب متغیرهای غیرپایه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

21

تحقیق در عملیات

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \end{cases}$$

اگر در دستگاه فوق، مقدار متغیر غیرپایه x_3 را برابر صفر قرار دهیم، مقدار متغیرهای پایه به صورت $(x_1, x_2) = (3, 1)$ به دست آمده که در این حالت $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 0)$ یک جواب پایه برای دستگاه معادلات اصلی خواهد بود. همچنین، با توجه به نامنفی بودن مقادیر به دست آمده برای متغیرها در این جواب پایه، یک جواب پایه شدنی داریم.

22

تحقیق در عملیات

بهینگی

در این قسمت تعاریف و قضایای مورد نیاز در مورد بهینگی یک مسئله برنامه ریزی خطی بیان می شود.

جواب بهینه: مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max z = cx$$

$$\text{s. t. } x \in S.$$

نقطه $x^* \in S$ جواب بهینه مسئله است هرگاه برای هر $x \in S$ داشته باشیم $cx^* \geq cx$.

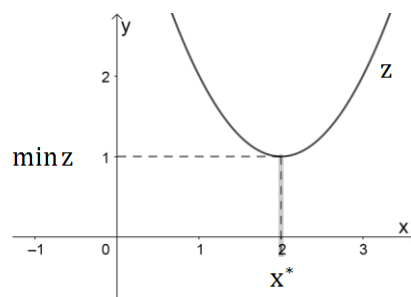
به عبارت دیگر، نقطه $x^* \in S$ جواب بهینه مسئله است هرگاه نقطه ای با مقدار تابع هدف بهتر (در

مسئله ماکزیمم سازی یعنی بیشتر) از x^* در ناحیه شدنی یافت نشود. اگر تابع هدف از نوع مینیمم

سازی باشد، علامت نامساوی برعکس بوده و نقاط بهتر از x^* ، نقاط با مقدار تابع هدف کمتر هستند.

23

تحقیق در عملیات

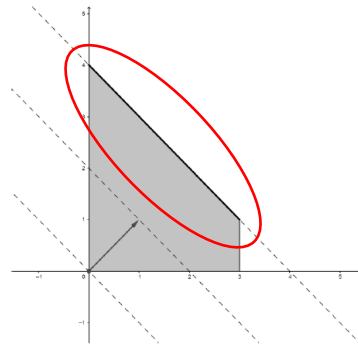


24

تحقیق در عملیات

قضیه ۱-۲: اگر یک مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه باشد، آنگاه حداقل یک جواب بهینه گوشه ای نیز دارد.

به بیان دیگر، از بین جواب های بهینه یک مسئله برنامه ریزی خطی، حداقل یکی گوشه ای است و اگر یک مسئله دارای جواب بهینه منحصر بفرد باشد، آنگاه آن جواب بهینه حتماً گوشه ای خواهد بود.



25

تحقیق در عملیات

قضیه ۲-۲: اگر برای یک نقطه گوشه ای از ناحیه شدنی یک مسئله برنامه ریزی خطی، هیچ نقطه گوشه ای مجاور بهتر از آن یافت نشود، آن نقطه جواب بهینه مسئله خواهد بود.

قضیه ۳-۲: هر جواب پایه شدنی از ناحیه شدنی یک مسئله برنامه ریزی خطی متناظر یک نقطه گوشه ای ناحیه است و بالعکس.

26

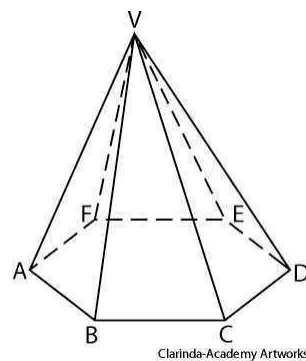
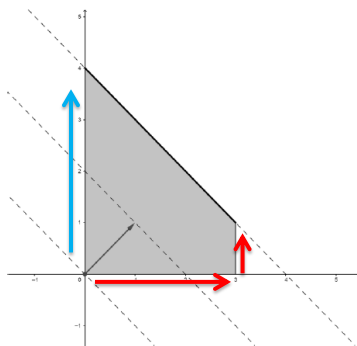
روش سیمپلکس

روش سیمپلکس یک الگوریتم تکراری برای حل مسائل برنامه ریزی خطی است. الگوریتمی که می تواند وضعیت مسئله را مشخص کرده و حالتی که برای آن رخ می دهد (دارای جواب بهینه، بی کران، نشدنی و ...) را مشخص نماید.

شروع روش سیمپلکس همواره از یک نقطه گوشه ای است و در هر تکرار خود با حرکت از یک نقطه گوشه ای، به یکی از نقاط گوشه ای مجاور آن می رود، بطوریکه با این حرکت، مقدار تابع هدف مسئله بدتر نشود.

الگوریتم سیمپلکس، یک از ۱۰ الگوریتم برتر قرن ۲۰ ام است

27



28

تحقیق در عملیات

اگر یک مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه باشد، تکرارهای روش سیمپلکس تا جایی ادامه می یابد که به یک نقطه گوشه ای ناحیه شدنی برسد که نقاط گوشه ای مجاورش بهتر از آن نباشند. این چنین نقطه ای طبق قضیه ۲-۲، جواب بهینه مسئله خواهد بود. در واقع، شرط خاتمه روش سیمپلکس این است که هیچ حرکت بهبود بخشی از آخرین نقطه گوشه ای به دست آمده ممکن نباشد.

29

تحقیق در عملیات

ورود اطلاعات به جدول سیمپلکس

روش سیمپلکس قادر است مسائل برنامه ریزی خطی به فرم استاندارد را حل کند و لازم است هر مسئله برنامه ریزی خطی، قبل از شروع این روش، به فرم استاندارد تبدیل شود.

30

تحقیق در عملیات

در این قسمت، ابتدا روش سیمپلکس را برای حل مسائل کانونی به فرم

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

با شرط $b \geq 0$ بیان می کنیم. این مسئله با اضافه کردن متغیرهای کمکی، به فرم استاندارد زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax + Is = b, \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{aligned}$$

که ضریب متغیرهای کمکی در تابع هدف، برابر صفر است.

31

تحقیق در عملیات

با توجه به اینکه ضرایب مربوط به متغیرهای S در محدودیت های مدل فوق، ماتریس همانی است، بنابراین، بردار S می تواند نقش متغیرهای پایه و بردار X نقش متغیرهای غیرپایه را بازی کنند. اگر متغیرهای پایه بر حسب متغیرهای غیرپایه محاسبه شوند، داریم:

$$Is = b - Ax$$

با مساوی صفر قرار دادن متغیرهای غیرپایه، یک جواب پایه شدنی به صورت $(x, s) = (0, b)$ با مقدار تابع هدف برابر صفر برای این مسئله به دست می آید. این جواب شدنی پایه که متناظر یک نقطه گوشه ای از ناحیه شدنی است، در حل این مسئله به عنوان نقطه شروع الگوریتم سیمپلکس استفاده می شود. برای حل این مسئله برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس، اطلاعات آن را وارد یک جدول به نام جدول سیمپلکس کرده و سپس در هر تکرار، اطلاعات موجود در جدول را به روز کرده تا به جدول نهایی رسیده و وضعیت مسئله مشخص شود.

تحقیق در عملیات

اجزای یک جدول سیمپلکس به شرح زیر است:

- سطر اول: ابتدا نام متغیرهای مسئله و در انتهای آن نام ستون سمت راست که به اختصار R. H. S است.
- سطر دوم: ابتدا نام تابع هدف (Z)، سپس قرینه ضریب متغیرهای مسئله در تابع هدف در زیر متغیر مربوطه و در انتها مقدار تابع هدف (با نماد Z_0 که در ابتدا برابر صفر است).
- سطر سوم: ابتدا نام متغیرهای پایه، پس از آن ضریب متغیرهای مسئله در محدودیت ها در زیر متغیر مربوطه و در انتها مقادیر بردار سمت راست محدودیت ها (که در ابتدا با بردار b برابر است)

33

تحقیق در عملیات

اولین جدول سیمپلکس متناظر مسئله استاندارد ساخته شده در فوق که جدول آغازین نامیده می شود، به صورت زیر است:

	x	s	R. H. S
Z	$-c$	$\cdot$	$\cdot$
s	A	I	b

با توجه به توضیحات قبل و جدول فوق می توان دریافت که در یک جدول سیمپلکس، مقدار متغیرهای غیرپایه (در پایین ستون سمت چپ) برابر صفر بوده و مقدار متغیرهای پایه نیز در پایین ستون سمت راست قرار دارد.

34

تحقیق در عملیات

$\max z = cx$
 s. t. $Ax \leq b,$
 $x \geq 0$

$\max z = cx$
 s. t. $Ax + Is = b,$
 $x \geq 0, s \geq 0$

قرینه ضریب متغیرها
 متغیرها
 نام تابع هدف
 مقدار تابع هدف
 متغیرهای پایه
 بردار سمت راست (مقادیر متغیرهای پایه)
 ضریب متغیرها در محدودیت ها

	x	s	R. H. S
z	-c	0	0
s	A	I	b

35

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۵. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
 \max z &= x_1 + 2x_2 \\
 \text{s. t. } 4x_1 + 2x_2 &\leq 3, \\
 2x_1 - x_2 &\leq 2, \\
 x_1, x_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

که پس از اضافه کردن متغیرهای کمکی به محدودیت ها، فرم استاندارد آن به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
 \max z &= x_1 + 2x_2 \\
 \text{s. t. } 4x_1 + 2x_2 + s_1 &= 3, \\
 2x_1 - x_2 + s_2 &= 2, \\
 x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

36

تحقیق در عملیات

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + s_1 = 3, \\ & 2x_1 - x_2 + s_2 = 2, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0. \end{aligned}$$

با ورود داده های موجود در مدل فوق، جدول آغازین این مسئله برای شروع روش سیمپلکس به صورت زیر ساخته می شود:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-1	-2	0	0	0
s_1	4	2	1	0	3
s_2	2	-1	0	1	2

37

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R. H. S
Z	-1	-2	0	0	0
s_1	4	2	1	0	3
s_2	2	-1	0	1	2

این جدول متناظر جواب پایه شدنی با مشخصات زیر است:

$$x_N = (x_1, x_2) = (0, 0),$$

$$x_B = (s_1, s_2) = (3, 2),$$

$$z_0 = 0,$$

38

قسمت سوم

تمرین ۱-۲. در دستگاه های معادلات زیر، متغیرهای پایه را بر حسب متغیرهای غیرپایه به کمک روش گاوس- جردن به دست آورید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

تمرین ۲-۲: فرض کنید ناحیه شدنی S با دستگاه معادلات زیر تعریف شده باشد. یک جواب پایه شدنی برای این ناحیه شدنی به دست آورید. سپس پارامترهای $N, B, \bar{N}$ و $\bar{b}$ را مشخص کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$